

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Economics, 2023; 1(222): 76-87

УДК 330.43, 336.763

JEL classification: C32, G15, G32

DOI: <https://doi.org/10.17721/1728-2667.2023/222-1/10>

О. Ляшенко, д-р екон. наук, проф.

ORCID ID: 0000-0002-0197-4179

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

К. Молоканова, консультант

ORCID ID: 0000-0002-6926-7171

EY Germany, Берлін, Німеччина,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

АНАЛІЗ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ДОХІДНОСТІ АКЦІЙ MICROSOFT ТА PFIZER ЗА ДОПОМОГОЮ ARIMA-GARCH-МОДЕЛЕЙ

Важлива роль акцій як об'єкта інвестування зумовлює потребу в аналізі та прогнозуванні їхніх котирувань. Оскільки за типом даних значення дохідності акцій є часовим рядом, то з притаманними йому сплесками волатильності в окремі періоди це завдання потребує використання спеціальних підходів та моделей. Найбільшою якістю вирізняється моделювання за допомогою поєднання ARIMA-GARCH моделей. Застосування економіко-математичного моделювання та економетричного аналізу до часового ряду дохідностей акцій є одним із небагатьох способів якісно відобразити як понятійну – фінансову, так і практичну – математичну складову дослідження. Комплексно проаналізовано динаміку акцій компаній Microsoft та Pfizer. Побудовано й оцінено різноманітні модифікації економетричних моделей класу ARIMA-GARCH для аналізу дохідності акцій. Емпірично виявлено наявність кластеризації волатильності у фінансових часових рядах та обрано моделі для коректної її апроксимації для компаній Microsoft та Pfizer. Практична цінність дослідження полягає в можливості використання результатів цієї роботи для прогнозування дохідності обраних цінних паперів з урахуванням кластеризації волатильності та результатів у прийнятті інвестиційних рішень.

Ключові слова: ARIMA-GARCH моделі, цінні папери, фінансові часові ряди, акції, фондовий ринок, волатильність.

ВСТУП. Інвестування у фінансові інструменти є одним із найпоширеніших способів отримання пасивного доходу економічними суб'єктами. Акції є основою для формування світових фондових індексів, що розглядаються як важливий індикатор ділової активності через репрезентативність різноманітних сфер економіки. Одним із найпоширеніших типів транзакцій на світових фондових ринках є придбання індивідуальними інвесторами акцій певної компанії з метою отримання прибутку внаслідок сприятливої цінової динаміки таких цінних паперів. Окрім того, акції слугують базовим активом для деривативів, формують пайові інвестиційні фонди, хедж-фонди, ETF, пенсійні фонди, що значно розширює коло осіб, які зазнають впливу змін котирувань акцій і прагнуть отримати повну інформацію про динаміку та характеристики акцій компаній для можливого коригування власної інвестиційної стратегії.

Глобалізація економіки сучасного світу, тісні економічні зв'язки між компаніями різних країн формують нові виклики для компаній у випадку настання економічних криз. Економічні обмеження, зумовлені заходами боротьби з пандемією коронавірусу, вплинули на транспортні переміщення в усьому світі, що, у свою чергу, вплинуло на ланцюги поставок майже всіх видів продукції. Нові реалії та ускладнення операційної діяльності компаній викликали погіршення очікувань інвесторів, що проявилось як падіння котирувань цінних паперів багатьох компаній та зростання волатильності.

Водночас окремі компанії виявилися порівняно стійкими до впливу наслідків економічної кризи або навіть змогли покращити свої ринкові позиції. Перш за все, це представники технологічної індустрії, що позначили стрімке зростання попиту на свою продукцію і послуги через переведення роботи та навчання в дистанційний формат у всьому світі. Фармацевтичні компанії відігравали провідну роль у розробках вакцин проти COVID-19, що була покликана врятувати здоров'я та життя людей та якомога швидше зняти обмеження економічної діяльності. Зростання соціальної значимості продукції таких компаній зумовило підвищений попит на акції компаній з боку інвес-

торів, що стимулювало зростання їхніх котирувань та укріплення фінансових позицій наведених компаній.

Важлива роль акцій як об'єкта інвестування зумовлює потребу в аналізі та прогнозуванні їхніх котирувань. Оскільки за типом даних значення дохідності акцій є часовим рядом, якому до того ж притаманні сплески волатильності в окремі періоди, то це завдання потребує використання спеціальних підходів та моделей. Найбільшою якістю вирізняється моделювання за допомогою поєднання ARIMA-GARCH моделей, яке набуло значного поширення в науковій літературі. Аналіз фінансових часових рядів є поширеною та актуальною темою економетричних досліджень через можливість широкого застосування на практиці результатів таких досліджень при прийнятті інвестиційних рішень.

Якісне прогнозування котирувань акцій є надзвичайно актуальним завданням як для індивідуальних інвесторів, так і для інвестиційних консультантів, портфоліо-менеджерів та представників суміжних професій. Застосування економіко-математичного моделювання та економетричного аналізу до часового ряду дохідностей акцій є одним із небагатьох способів якісно відобразити як понятійну – фінансову, так і практичну – математичну складову дослідження. Ця тематика потребує подальшого всебічного дослідження, що вказує на актуальність обраної теми для дослідження.

Метою дослідження є аналіз динаміки котирувань акцій компаній Microsoft та Pfizer, економетричне моделювання їхньої дохідності та врахування кластеризації волатильності за допомогою класу ARIMA-GARCH моделей і прогнозування значень.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ. Дослідженням динаміки котирувань фінансових інструментів та економетричним моделюванням фінансових часових рядів займалися такі вчені, як: Ю. Фама [1]; Б. Мелкіел [2]; Т. Тарно та ін. [3]; Р. Бхоумік [4]; С. Ванг та ін. [5]; Д. Аллен та В. Рахім [6]; С. А. Шарп [7]; М. Гхані [8]; Р. Інгл [9]; С. Лундберг та Р. Терасвірта [10]; С. Соєряна [11]; Т. Нейлор [12]; Дж. Левендіс [13]; К. Черкашина [14]; О. Ляшенко та Т. Кравець [15], а також інші дослідники. Зокрема, у роботі Й. Ксіанг [16] розглядаються коливання цін на

нафту на світових ринках. Дослідження показує, що комбінована модель ARIMA (1,1,1,0)-GARCH (1,1) дає більшу точність при короткостроковому прогнозуванні світових цін на нафту.

У роботі М. Гхані та Х. А. Рахім [8] розглядається ціна на малайзійський каучук. Із 2008 р. ціна на каучук привернула увагу інвесторів і Malaysia Rubber Board через коливання цін. Ціна каучуку характеризується наявністю важких хвостів і кластеризації волатильності. Підхід, який використовується для моделювання ціни каучуку, є моделлю узагальненої авторегресійної умовної гетероскедастичності (GARCH). Результати показують, що модель ARMA (1,0)-GARCH (1,2) є найкращою при моделюванні волатильності ціни каучуку.

У роботі Т. Тарно та ін. [3] розглядається прогнозування VaR через прибутковість портфеля. Портфель акцій – це форма інвестування, яку можна використовувати для мінімізації ризику втрат. Якщо дисперсія дохідності портфеля є гетероскедастичною, прогнозування ризику можна зробити за допомогою VaR з використанням моделі ARIMA-GARCH або ансамблю ARIMA-GARCH. Для конкретного портфеля акцій показано, що найкращою моделлю є ARIMA (0,0,[3])-GARCH (1,2).

У роботі Ч. Дріцакі [17] розглядається моделювання та прогнозування цін на нафту. Одним із методів, які використовуються для прогнозування цін на нафту, є методологія Бокса–Дженкінса через моделі ARIMA. Хоча ці моделі забезпечують точне прогнозування протягом короткого періоду часу, вони не в змозі впоратися з нестабільністю та нелінійністю, представленими в рядах даних. Із цієї причини в цій статті досліджується гібридна модель ARIMA-GARCH для прогнозування волатильності повернення цін на нафту. Результати роботи показали, що гібридна модель ARIMA (33,0,14)-GARCH (1,2) за нормальним розподілом найбільш придатна для прогнозування цін на нафту. Аналіз цих робіт дає можливість провести комплексний аналіз обраних фінансових індексів та здійснити їхнє моделювання.

Фактори впливу на ціноутворення та волатильність акцій. Останні десятиліття ознаменували стрімкий розвиток фондових ринків, не лише у розвинутих країнах, як США, Японія, Німеччина, Великобританія, але й у країнах, що розвиваються, та мають значні обсяги внутрішнього ринку, зокрема, – Індії, Індонезії, Пакистані, Нігерії, Філіппінах та інших [18]. Із цієї причини питання ціноутворення на ринку капіталів, у тому числі на фондовому ринку, отримало підвищений інтерес як з боку економістів, фінансистів та інших дослідників, так і з боку інвесторів-практиків. Американський макроекономіст, професор Гарвардського університету Г. Менкью зазначав, що очікування економічних суб'єктів щодо умов ведення бізнесу в країні значною мірою проявляються на фондових ринках через очікування змін дохідності активів. Наприклад, стрімке зростання цін на фондових ринках є однією з ознак очікування інвесторами зростання економіки, а падіння – уповільнення бізнес-активності. За різкого падіння фондового ринку можуть настати передумови до припущення настання економічної рецесії [19].

Однією з найвпливовіших концепцій інвестування в інструменти фондового ринку стала концепція "ефективного ринку". Її запропонував у 1970 р. американський економіст Ю. Фама у своїй праці "Ефективні ринки капіталу: огляд теорії та емпіричних результатів", яка принесла йому Нобелівську премію з економіки в 2013 р. Згідно з даною теорією інформація, яка може впливати на котирування акцій, доступна широкому загалу інвесторів і підлягає вільному обміну між ними [1]. Оскільки на ринку для

кожної акції існує велика кількість покупців і продавців, які володіють інформацією про актив, то зміни котирувань акцій викликані різним трактуванням інвесторами цієї інформації і не мають часового лагу. Таким чином, акції завжди торгуються на фондовому ринку за їхньою справедливою ринковою вартістю, а отже, купівля недооцінених або продаж переоцінених акцій з метою отримання прибутку надзвичайно малоймовірна. Отже, за Ю. Фама, поширена ідея "переграти ринок" – отримати вищі рівні дохідності внаслідок дій на фондовій біржі з боку портфельних менеджерів чи інших посередників порівняно із середньо ринковою дохідністю приречена на невдачу [1].

Гіпотеза "ефективного ринку", попри свою теоретичну значущість, не пояснює всіх особливостей динаміки котирувань цінних паперів через вплив психологічного фактора на дії учасників. Тому ціни на активи та їхня динаміка підлягають впливу різних факторів. Дослідження динаміки котирувань цінних паперів у межах фондового ринку нерозривно пов'язане з їхньою волатильністю. Волатильність визначається як стандартне відхилення – квадратний корінь із дисперсії – при аналізі часових рядів дохідностей фондових індексів чи цінних паперів [20, 21]. Б. Борті визначає волатильність як "здатність цін на фондовому ринку змінюватися неочікувано для інвесторів" [22].

Аналіз та прогнозування волатильності стали однією з ключових тем дослідження в економетриці та кількісних фінансах, оскільки волатильність активів має бути врахована при їхньому введенні до складу інвестиційного портфеля та формуванні його загальної структури, прогнозуванні темпів зростання, ціноутворенні опціонів, купівлі індивідуальних акцій чи вкладеннях у ETF за структурою фондових індексів [23].

На фондових ринках волатильність завжди наявна через існування часового лагу в отриманні інформації інвесторами та різноманітне її трактування, дію законів попиту та пропозиції, більший вплив окремих учасників ринку порівняно з іншими [22]. Однак вона переважно нерівномірно розподілена протягом часу і демонструє суттєві сплески в окремі періоди. Окрім того, існують фактори, що впливають на фондові ринки в цілому, а зокрема, на котирування цінних паперів та їхню волатильність. Таким чином, при аналізі історичної інформації котирувань цінних паперів ці чинники мають бути враховані для отримання коректних висновків про особливості діяльності компанії, її залежності від зовнішніх обставин та інших подій.

Пандемія COVID-19 є певною мірою нетиповим випадком для аналізу впливу глобальних катастроф на фондові ринки. У цілому найбільший вплив природної чи техногенної катастрофи на фондовий ринок здійснюється в перші кілька днів після аварії, після чого ринок відновлюється. Однак через наявність значної кількості обмежень економічної діяльності в більшості високорозвинутих країн протягом тривалого періоду та збереження їх у деяких країнах на даний момент (зокрема в Китаї) вплив пандемії фіксувався на котируваннях акцій з моменту початку пандемії в березні 2020 р. і наявний на даний момент. Наприклад, унаслідок переходу різноманітних підприємств та установ на віддалену форму роботи котирування акцій технологічних компаній, зокрема, Zoom, Google (Alphabet), Microsoft зросли. Водночас неоднозначною є ситуація для компаній, що фокусуються на виготовленні електронних пристроїв (зокрема, ноутбуків, смартфонів тощо), оскільки стрімке зростання попиту на продукцію компаній не було компенсовано вищою пропозицією з боку таких компаній через перебої у виробництві мікрочипів унаслідок карантинних обмежень та порушенні логістичних ланцюгів [24].

Пандемія COVID-19 зумовила трансформацію навчання, роботи й інших видів діяльності та переведення їх у дистанційний формат, що сприяло зростанню фінансових показників Microsoft: на початку 2021 р. компанія відзвітувала про зростання чистого прибутку на 33 %. Таке рекордне зростання прибутків було зумовлене підвищеним попитом на персональні комп'ютери через дистанційну роботу, зростанням продажів ігрових консолей Xbox та популяризацією електронних сервісів компанії. Продовження такої тенденції зумовило зростання цін акцій на 55 % у 2021 р. та ринкової капіталізації компанії до рівня \$2,5 трлн та конкурування з Apple та Saudi Aramco за звання компанії із найвищою ринковою капіталізацією у світі. Окрім того, при поширенні віддаленої роботи проєктних команд зросла потреба у хмарних сервісах, що викликало зростання популярності одного з продуктів Microsoft – Azure – хмарної платформи з можливістю розміщення даних та розробки додатків на хмарних серверах. Однак на початку 2022 р. динаміка котирувань акцій Microsoft, як і інших найбільших технологічних компаній США, була негативною у зв'язку зі стримувальною монетарною політикою Федеральної резервної системи США [25].

Унаслідок пандемії коронавірусу, що вразила світ у березні 2020 р. та паралізувала логістичні ланцюги, надзвичайно висока увага була прикута до найбільших світових фармацевтичних компаній та їхніх спроб виготовлення вакцини проти вірусу. Наприкінці 2020 р. Pfizer розробила

вакцину із зазначеною ефективністю на рівні 95 % у протидії вірусу, яка згодом була схвалена регуляторами різних країн для застосування. На початку 2021 р. було розпочато кампанії з вакцинації населення в різноманітних країнах, що стимулювало вищий попит на вакцину порівняно з пропозицією та спричинило стрімке зростання котирувань акцій компанії. Наразі успішні розробки препаратів компанією стимулюють зростання її виручки та позитивно впливають на динаміку цінних паперів.

МЕТОДОЛОГІЯ. Розвиток та побудова моделей ARIMA як інструменту прогнозування фінансово-економічних змінних відомі під назвою "Методологія Бокса–Дженкінса" [26]. Методологія Бокса–Дженкінса полягає в повторенні чотирьох кроків, а саме: ідентифікація моделі, оцінка параметрів, діагностика за допомогою тестів та перевірка прогностичної здатності моделі. До більш простих ARMA-моделей входять два компоненти:

- модель авторегресії (AR). Поширений запис $AR(p)$ означає, що авторегресійний процес змінної y_t був побудований на p лагів її значень;

- модель рухомого середнього (MA). Поширений запис $MA(q)$ означає, що регресія значення змінної y_t була побудована на q лагів її збурень.

ARMA(p, q) модель може бути подана рівнянням такого вигляду:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \dots + \beta_p y_{t-p} + \mu + \varepsilon_t + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \gamma_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \gamma_q \varepsilon_{t-q}, \quad (1)$$

де y_t – часовий ряд, ε_t – процес "білого шуму", μ – математичне сподівання y_t , β, γ – коефіцієнти моделі.

Для побудови ARMA-, а отже, і ARIMA-моделей важливо враховувати можливість взаємного переходу AR- та MA-процесів. Унаслідок певних особливостей ARMA-моделі можуть зводитися до AR- або MA-моделей. Порівняно з ARMA-моделлю, ARIMA включає також компонент $I(d)$, роль якого полягає в перетворенні нестационарних часових рядів на стаціонарні шляхом їх інтегрування d разів до отримання стаціонарних значень різниць d -го порядку. У більшості випадків достатнім є взяття перших різниць у випадку наявності лінійного тренду та взяття різниць 2-го порядку за квадратичного тренду. За необхідності взяття вищих порядків різниць розглядають інші варіанти моделей, зокрема згладжування. Якщо графік часового ряду має ввігнутий висхідний тренд, що супроводжується зростанням дисперсії, використовують логарифмування або взяття квадратного кореня від значень показника [27].

На практиці часовий ряд котирувань цінних паперів майже завжди є нестационарним процесом через зміну математичного сподівання в часі, зумовлену посиленням (або послабленням) позицій компанії на ринку. Якщо гіпотеза про стаціонарність часового ряду відхиляється, використовують ARIMA-модель. На відміну від котирувань цінних паперів, їхня дохідність може бути стаціонарним процесом, тому поширене моделювання її математичного сподівання за допомогою ARMA-моделі. Оскільки ARMA-модель не враховує наслідки умовної гетероскедастичності за відсутності тренду (напр., кластеризацію волатильності), то для оптимального моделювання та аналізу фінансових часових рядів використовують поєднання ARMA-GARCH-моделей [28, 29].

Окремі інструменти моделювання, зокрема R , дають можливість автоматично встановити оптимальну специфікацію ARIMA-моделі для пояснення наявних даних. Однак за значеннями та графіками автокореляційних функцій можна зробити припущення про форму моделі.

Якщо значення та графіки ACF та PACF відображають процес швидкого загасання значень автокореляції до 0, найімовірніша оптимальна специфікація моделі – ARMA (хоча може використовуватися як AR-, так і MA-процес окремо). У цьому випадку значення p і q не очевидні й оцінювання різних варіантів моделі дає можливість встановити її оптимальний варіант.

Якщо ACF та PACF не мають загасаючої тенденції й після великої кількості лагів значення автокореляційних функцій близьке до 1, процес не стаціонарний і потребує взяття різниць. Відповідно, оптимальною специфікацією моделі є ARIMA. Після побудови моделі, її оцінюють.

Автокореляцію залишків аналізують також за графіком ACF та PACF. Для оптимальної ARIMA-моделі всі значення автокореляції між залишками мають бути незначимими [30]. Якщо це твердження порушується, варто перевірити на наявність ARCH-ефекту в залишках.

У випадку підтвердження коректності кількох ARMA/ARIMA-моделей на значеннях певного часового ряду, оптимальну серед них можуть обирати на основі таких критеріїв:

- найменша кількість параметрів;
- мінімальне значення стандартних похибок для прогнозних значень;
- інформаційні критерії.

- Надалі на основі обраної моделі за допомогою відповідних функцій практичного інструментарію, наприклад R , будують прогноз на подальші значення часового ряду.

При дослідженні фінансових часових рядів окрему роль відіграє їхня волатильність. При вивченні ризику волатильність виражається коренем із дисперсії, тобто мірою розкиду значень показника від його математичного сподівання [31]. У випадку нестационарних часових рядів з умовною гетероскедастичністю дисперсія не є константою та залежить від часу, тоді як ARIMA-моделі вирішують проблему нестационарності математичного

сподівання, неврахування ними умовної гетероскедастичності не дає можливості здійснити комплексний аналіз та прогнозування фінансових часових рядів [32]. Окрім того, для волатильності характерна так звана кластеризація, тобто сплеск в окремі періоди та зумовлення високим рівнем волатильності в цьому періоді високих її рівнів надалі. Таким чином, коректне моделювання волатильності дає змогу максимально наблизитися до реальних процесів, що відбуваються на фінансових ринках. Із

цією метою на практиці використовують модель GARCH (General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), яку сформулював Т. Боллерслев у 1986 р. [33, 34] як узагальнення моделі ARCH авторства Р. Інгла [9].

Спершу розглянемо рівняння, якими задається ARCH(q)-процес. Він складається з двох рівнянь, що описують математичне сподівання та дисперсію:

$$y_t = \beta_0 + \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad (2)$$

де y_t – часовий ряд, ε_{t-1}^2 – квадрат останньої відносної зміни показника, β_0 – умовне середнє y_t , σ_t^2 – умовна дисперсія, α_i – коефіцієнти моделі. Саме рівняння, що описує дисперсію, ключовим для розуміння ARCH-моделі. На параметр рівняння дисперсії накладено обмеження $0 < \alpha_i < 1$ для забезпечення додатного значення дисперсії за умови збереження її стаціонарності [26].

Для дисперсії ARCH(q)-процесу характерна умовна гетероскедастичність, що дає можливість використовувати його для моделювання залежної від часу волатильності [35]. GARCH-моделі є узагальненням класу моделей ARCH. Оскільки для відстеження впливу q лагів збурень у моделі ARCH необхідно оцінити $q + 1$ параметр, то це може ускладнювати аналіз ефектів за великої кількості лагів. GARCH-моделі дають можливість зменшити кількість параметрів, водночас зберігаючи і навіть підвищуючи точність оцінювання. Форма запису GARCH(p, q) означає взяття p лагів для дисперсії та q лагів збурень [30].

Наведемо рівняння дисперсії для моделі GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (3)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t u_t, \text{ причому } u_t \sim N(0,1).$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \gamma_p \sigma_{t-p}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \gamma_j \sigma_{t-j}^2. \quad (4)$$

У випадку $p = q = 0$ процес стає білим шумом.

Перед застосуванням до часового ряду GARCH-моделі необхідно здійснити перевірку на наявність ARCH-ефекту – існування умовної гетероскедастичності через автокореляцію залишків моделі ARIMA. Здійснюється перевірка гіпотези в R за допомогою функції ArchTest [38, 39]:

H₀: відсутність ARCH-ефекту в залишках ARIMA-моделі,

H_a: наявність ARCH-ефекту в залишках ARIMA-моделі.

Статистика тесту має розподіл χ^2 . У випадку перевищення значення статистики ARCH LM-тесту над критичним значенням χ^2 (або, якщо $p\text{-value} < 0,05$) гіпотеза про відсутність ARCH-ефекту в залишках ARIMA-моделі відхиляється. У такому випадку існує необхідність побудови GARCH-моделі та аналізу часового ряду за її допомогою. У протилежному випадку в GARCH-моделі немає необхідності [40].

Для коректної GARCH-моделі має виконуватися вимога $p\text{-value} > 0,05$, що свідчить про прийняття нульової гіпотези про відсутність структури в залишках моделі [41, 42]. Для стандартної GARCH-моделі характерна симетрія [43], тобто встановлення рівного ефекту для позитивних/додатних збурень ($\varepsilon_{t-1} > 0$) та негативних/від'ємних збурень ($\varepsilon_{t-1} < 0$) на дисперсію в періоді t , а отже, і

де σ_t^2 – умовна дисперсія ε_{t-1}^2 – квадрат останньої відносної зміни показника, α_i, γ_i – коефіцієнти моделей ARCH та GARCH, відповідно.

Таким чином, можна відстежувати волатильність як залежну змінну не лише від збурень, але й від її лагового значення, оцінюючи всього три параметри. Найбільш поширеною в практиці аналізу фінансових часових рядів є саме така специфікація моделі – GARCH(1,1) [36, 37].

GARCH (1,1)-процес є стаціонарним за виконання умови $\alpha_1 + \gamma_1 < 1$. У загальному вигляді модель GARCH(p, q) має таку специфікацію:

волатильність як корінь із неї. На практиці ж реакція учасників фінансових ринків на негативні шоки може лише посилити волатильність через масове вилучення власних коштів та розпродаж цінних паперів, що зумовлює подальший обвал їхньої ціни та посилює турбулентність [42]. Тому дуже важливими на практиці є специфікації GARCH-моделей, що враховують асиметрію впливу шоків різних знаків, зокрема:

- GJR-GARCH. Цей тип моделі передбачає асиметрію реакції умовної дисперсії на позитивні та негативні шоки, яка задається рівнянням

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \tau_i \varepsilon_{t-i}^2 d_{t-i} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \sigma_{t-j}^2, \quad (5)$$

де d_{t-1} – даммі-змінна, що визначається як

$$d_{t-1} = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0, & \varepsilon_{t-1} \geq 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Водночас для виконання вимог додатного значення дисперсії мають виконуватися вимоги:

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_i > 0, \quad \gamma_i \geq 0, \quad \alpha_i + \tau_i \geq 0. \quad (7)$$

Ефект додатного значення шоку на умовну дисперсію визначається коефіцієнтом α , тоді як ефект негативного шоку – коефіцієнтами $\alpha + \tau$, що відображає асиметрію впливу шоків різного знака і підвищення волатильності у випадку впливу шоків негативного знака. У випадку

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \gamma_j \ln(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left| \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right| + \sum_{k=1}^r \tau_k \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sigma_{t-k}}. \quad (8)$$

У цьому рівнянні τ_k відображає ефект посилення, що зумовлює асиметрію моделі. Якщо $\tau_k \neq 0$, то присутня асиметрія впливу позитивних і негативних шоків, зокрема, за $\tau_k > 0$ більший вплив на умовну дисперсію мають додатні шоки, а за $\tau_k < 0$ – від'ємні. Водночас відсутнє обмеження на додатний знак усіх параметрів, що входять до рівняння дисперсії через експоненціальну форму відображення. Очевидно, що у випадку застосування EGARCH-специфікації GARCH-моделі коефіцієнт τ_k має бути визначений як статистично значущий у характеристиках моделі.

Окрім того, у межах кожної зі специфікацій моделі встановлюють функцію розподілу залишків моделі. Найпоширенішими варіантами в межах GARCH є нормальний розподіл, розподіл Стюдента або так званий асиметричний (skewed) розподіл Стюдента. Для цього для розподілу значень (як залишків, так і початкових даних використовують поняття коефіцієнта асиметрії (skewness) та коефіцієнта ексцесу (kurtosis). Розглянемо їх детальніше.

У випадку існування кількох моделей, що коректні за всіма вищенаведеними тестами, оптимальну модель

вибору GJR-GARCH-специфікації GARCH-моделі коефіцієнт τ_i має бути статистично значущим [43];

- EGARCH (Exponential GARCH). Експоненціальна GARCH-модель визначає умовну дисперсію рівнянням вигляду [43]:

обирають таку, значення інформаційних критеріїв якої (критерію Акаїке та Байєса) мінімальне [44]. Отримана модель позбавлена недоліку недоврахування кластеризації волатильності для фінансових часових рядів і оптимальна для їхнього моделювання та прогнозування подальших значень.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ. Базою даних для побудови ARIMA-GARCH-моделі стали дані щоденної дохідності акцій компаній Microsoft та Pfizer, зібрані протягом періоду з 1 січня 2016 р. по 1 серпня 2021 р. Інформацію було вивантажено в середовище RStudio із джерела YahooFinance за допомогою функції getSymbols пакета quantmod. Таким чином, початковою базою даних для дослідження стали 1404 спостереження для значення дохідності акцій Microsoft та Pfizer. Використання дохідностей замість безпосередніх котирувань акцій зумовлено метою нормалізації показника. Надалі було використано лог-дохідності для дотримання модельованим часовим рядом вимог адитивності, чого не вдається досягти використанням звичайного показника дохідності.

Розглянемо графіки лог-дохідностей акцій компаній і сформуємо первісні припущення про досліджувані ряди на їхній основі.

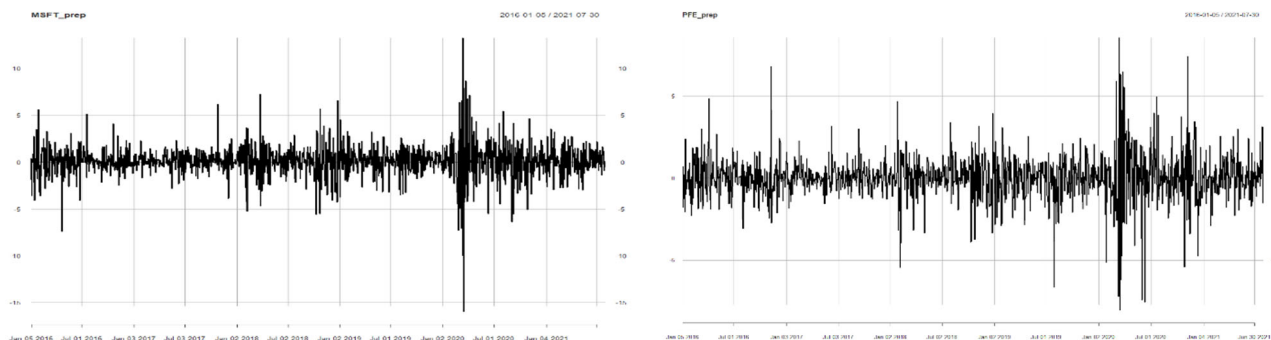


Рис. 1. Часовий ряд лог-дохідностей акцій Microsoft (зліва) та Pfizer (справа) від 1.01.2016 р. до 01.08.2021 р.

Джерело: розрахунки авторів.

Порівнюючи графіки лог-дохідностей акцій двох компаній, бачимо, що для котирувань (а отже, і дохідностей) акцій Microsoft характерна значно нижча волатильність, ніж для Pfizer. Періодом пікової волатильності для котирувань обох акцій став початок пандемії коронавірусу в березні 2020 р., який мав суттєвий вплив на світові фінансові ринки. Оскільки операційна діяльність Microsoft пов'язана з виробництвом нематеріальних продуктів і майже не залежить від ланцюгів постачання, то волатильність котирувань акцій компанії згодом знизилася до попередніх значень. Для Pfizer це відбулося пізніше, після випуску компанією вакцин проти коронавірусу, що підвищило впевненість інвесторів у акціях компанії як дохідному активі та знизило волатильність.

Графіки лог-дохідностей котирувань акцій Pfizer та Microsoft дають можливість припускати стаціонарність математичного сподівання часових рядів. Водночас дисперсія є нестационарною, має тенденцію до зростання в уже зазначені періоди та до кластеризації волатильності, зокрема для котирувань Pfizer після початку пандемії. Можна сформулювати початкове припущення про умовну гетероскедастичність часових рядів та автокореляцію, тобто наявність ARCH-ефекту, через що використання лише ARIMA-моделі буде недостатнім для апроксимації часових рядів. Надалі здійснимо перевірку такого припущення за допомогою статистичних тестів.

Для підтвердження чи спростування початкових припущень про наявність автокореляції та гетероскедастичності в значеннях показників часових рядів необхідно

провести ряд формальних статистичних та економетричних тестів. Насамперед виконаємо перевірку часових рядів лог-дохідностей котирувань акцій на стаціонарність математичного сподівання за допомогою розширеного

тесту Дікі–Фулера. У межах тесту проводиться перевірка нульової гіпотези про нестационарність часового ряду та її прийняття або спростування і, відповідно, прийняття альтернативної гіпотези про стаціонарність ряду (табл. 1).

Таблиця 1. Результати розширеного тесту Дікі–Фулера

Акції	DF (значення статистики Дікі–Фулера)	Критичне значення розподілу Стюдента	p-value	Стаціонарність ряду
Microsoft	-19,81	-2,35	0,01	стаціонарний
Pfizer	-18,94	-2,35	<0,01	стаціонарний

Джерело: розрахунки авторів.

Результати розширеного тесту Дікі–Фулера було отримано за допомогою функції `adf.test` з пакета `tseries`. У цьому випадку обидва ряди лог-дохідностей котирувань акцій стаціонарні. Це означає, що для побудови адекватної моделі немає необхідності для інтегрування часового ряду, а отже, моделі ARMA для апроксимації математичного сподівання часових рядів буде достатньо.

Надалі за допомогою функції `auto.arima` з пакета `forecast` у R визначимо оптимальні параметри моделей ARMA для лог-дохідностей часових рядів акцій Microsoft та Pfizer. Ця функція визначає оптимальну специфікацію моделі на основі мінімізації обраного інформаційного критерію, за замовчуванням встановлений найбільш поширений у літературі варіант – AIC та AICc. Для лог-дохідностей котирувань акцій Microsoft як

оптимальну було визначено модель ARMA (3,0) з нульовим математичним сподіванням.

Аналогічний алгоритм було застосовано для отримання оптимальної специфікації ARMA-моделі для лог-дохідностей котирувань акцій Pfizer. Найкращу якість відповідно до мінімізації штрафного критерію Акаїке показала модель ARMA(1,3). Після отримання оптимальних специфікацій моделі на основі штрафних критеріїв необхідно здійснити перевірку залишків моделі на наявність у них автокореляції, умовної гетероскедастичності, що порушують вимогу про розподіл залишків моделі відповідно до білого шуму. У випадку наявності автокореляції, умовної гетероскедастичності чи комбінованого ARCH-ефекту використання лише ARMA-моделі є недостатнім для апроксимації часового ряду (табл. 2).

Таблиця 2. Результати тесту на наявність ARCH-ефекту

Акції	Значення χ^2	Критичне значення χ^2	p-value	Наявність ARCH-ефекту
Microsoft	295,94	3,25	$< 2, 2e^{-16}$	наявний
Pfizer	207,50	3,25	$< 2, 2e^{-16}$	наявний

Джерело: розрахунки авторів.

У середовищі RStudio перевірка залишків моделей на наявність ARCH-ефекту здійснюється за допомогою функції `Arch.test` з пакета `vars`. Для обох досліджених часових рядів за результатами тесту була прийнята альтернативна гіпотеза про наявність ARCH-ефекту в залишках моделей і, відповідно, є необхідність використання ARMA-GARCH-моделі для коректної апроксимації часових рядів. У процесі тестування моделей для лог-дохідностей котирувань акцій Microsoft як оптимальну

модель для моделювання дисперсії було визначено E-GARCH(1,1). Таким чином, модель ARMA(3,0)-E-GARCH(1,1) дає можливість здійснювати апроксимацію часового ряду. Варто зазначити, що модель була оцінена на тренувальній частині вибірки, 350 спостережень (або 25 %) було відокремлено як тестову множину для прогнозування out-of-sample. Оптимальна модель для апроксимації лог-дохідностей акцій Microsoft має такий вигляд:

$$r_t = 0,09 - 0,09r_{t-1} - 0,02r_{t-2} - 0,01r_{t-3} + \varepsilon_t, \quad (9)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t u_t, \quad (10)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = 0,03 + 0,95 \ln(\sigma_{t-1}^2) - 0,13 \left(\left| \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \right| - E \left(\left| \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \right| \right) \right) + 0,24 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}. \quad (11)$$

Найбільший вплив на математичне сподівання лог-дохідностей акцій здійснюють лаги лог-дохідностей, а на дисперсію, – лаг дисперсії. Окрім того, суттєвим є асиметричний вплив стандартизованих шоків на дисперсію – значення коефіцієнта становить 0,24. Від'ємні значення окремих коефіцієнтів у рівнянні математичного сподівання та дисперсії вказують на наявність надмірної реакції ринку на новини, яка зумовлює зростання котирувань, однак згодом часткове їхнє повернення до вихідного положення. Значення коефіцієнтів рівняння дисперсії вказує на

виконання вимоги про її стаціонарність, оскільки $\alpha + \beta = 0,82 < 1$. Параметри AR2, AR3 було визначено як статистично незначущі, однак за їх усунення погіршуються результати моделі за інформаційними критеріями, тому було вирішено включити їх у модель. Значення коефіцієнта `shape` на рівні $4,38 > 3$ дає можливість припускати лептокуртотний розподіл модельованих залишків у межах GARCH-моделі зі значним їхнім зміщенням через значення коефіцієнта `shape` на рівні 0,92.

Для лог-дохідностей акцій Pfizer для моделювання дисперсії було обрано модель GJR-GARCH(1,1). Для апроксимації цього часового ряду оптимальною є модель ARMA(1,3)-GJR-GARCH(1,1). Модель була оцінена на

тренувальній частині вибірки, 300 спостережень (21 %) було відокремлено як тестову множину для прогнозування out-of-sample. Побудована модель має такий вигляд:

$$r_t = 0,04 - 0,29r_{t-1} + 0,19\varepsilon_{t-1} + 0,02\varepsilon_{t-2} - 0,01\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t, \quad (12)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t u_t, \quad (13)$$

$$\sigma_t^2 = 0,07 + 0,79\sigma_{t-1}^2 + 0,11\varepsilon_{t-1}^2 + 0,16\varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1}. \quad (14)$$

Відповідно до побудованої моделі найбільший вплив на лог-дохідності акцій Pfizer має перший лаг лог-дохідності та перший лаг шоків (значення коефіцієнтів становлять $-0,29$ та $0,19$, відповідно). Дисперсія лог-дохідностей цінних паперів компанії найбільше залежить від першого лагу дисперсії та лагу шоку (відповідні значення коефіцієнтів $-0,79$ та $0,11$). Рівняння дисперсії відображає існування впливу булевої змінної асиметрії залежно від знака лагу шоку на дисперсію лог-дохідностей – значення параметра становило $0,16$. Рівняння дисперсії стаціонарне, оскільки $\alpha + \beta = 0,90 < 1$. Значення коефіцієнта ексцесу на рівні $4,77$ вказує на лептокуртотний розподіл залишків у межах GARCH-моделі, що є поширеною рисою часових рядів дохідностей акцій.

У процесі порівняльного аналізу моделей здійснювалась перевірка їх на коректність відповідно до вимог відсутності ARCH-ефекту в цілому та автокореляції у залишках моделі. Окрім того, порівняння моделей здійснювалось відповідно до їхньої якості за тестом упередженості знака та тестом Пірсона на оптимальність специфікації. Оптимальна модель мала дотримуватися зазначених вище вимог коректності та демонструвати якість за результатами тесту Пірсона. Усі тести підтвердили коректність побудованих ARMA-GARCH-моделей для лог-дохідностей акцій Microsoft та Pfizer, що дозволяє використовувати їхні результати для подальшого аналізу та моделювання часових рядів.

Отримавши оптимальні специфікації ARIMA-GARCH-моделей для часових рядів дохідностей акцій Microsoft та Pfizer, використаємо їх для аналізу історичної динаміки акцій. Для цього проаналізуємо результати моделей та проведемо їхній графічний аналіз за допомогою функції `ugarchfit` з пакета `rugarch`. Оптимальною моделлю для моделювання лог-дохідностей акцій Microsoft на тренувальній вибірці було визначено ARMA(3,0)-E-GARCH(1,1). При зіставленні побудованих моделей та їхніх результатів асиметрична E-GARCH-модель (асиметрія впливу додатних та від'ємних шоків на волатильність) показала кращі

результати порівняно зі стандартною GARCH-моделлю, що заснована на припущенні про симетрію впливу шоків на дисперсію незалежно від їхнього знака. У результаті аналізу понад 20 специфікацій моделі було отримано висновки про вищу якість моделей з урахуванням асиметрії впливу волатильності (E-GARCH, GJR-GARCH) порівняно зі стандартними GARCH-моделями на основі інформаційних критеріїв Акаїке та Байєса. Для розподілу залишків моделі було обрано зміщений розподіл Стюдента, значення коефіцієнта *skew* становило $0,92$, що підтверджує гіпотезу про наявність асиметрії впливу шоків на волатильність залежно від їхнього знака. Варто зазначити, що при припущенні нормального розподілу залишків моделі якість моделі різко погіршувалася, зокрема за критерієм Пірсона на оптимальність специфікації та штрафними критеріями. Таким чином, маємо чергове підтвердження необхідності застосування GARCH-моделей, оскільки залишки ARIMA-моделі не мають нормального розподілу.

Для моделювання лог-дохідностей акцій Pfizer як оптимальну модель на основі тренувальної вибірки було обрано ARMA(1,3)-GJR-GARCH(1,1). У процесі вибору моделі також було зіставлено варіанти із симетричним та асиметричним урахуванням впливу знака шоків на волатильність дохідності цінних паперів та отримано висновки про вищу якість моделей з асиметричним урахуванням волатильності відповідно до інформаційних критеріїв. Окрім обраної GIR-GARCH(1,1)-моделі, якісні результати в аналізі показали GIR-GARCH(2,1), E-GARCH(2,1), GJR-GARCH(1,2) із розподілом Стюдента або зміщеним розподілом Стюдента для модельованих залишків. Як і в попередньому випадку, версії моделей із припущенням нормального розподілу модельованих залишків у межах GARCH-моделі показували значно гірші результати за інформаційними критеріями та необхідними статистичними тестами (рис. 2).

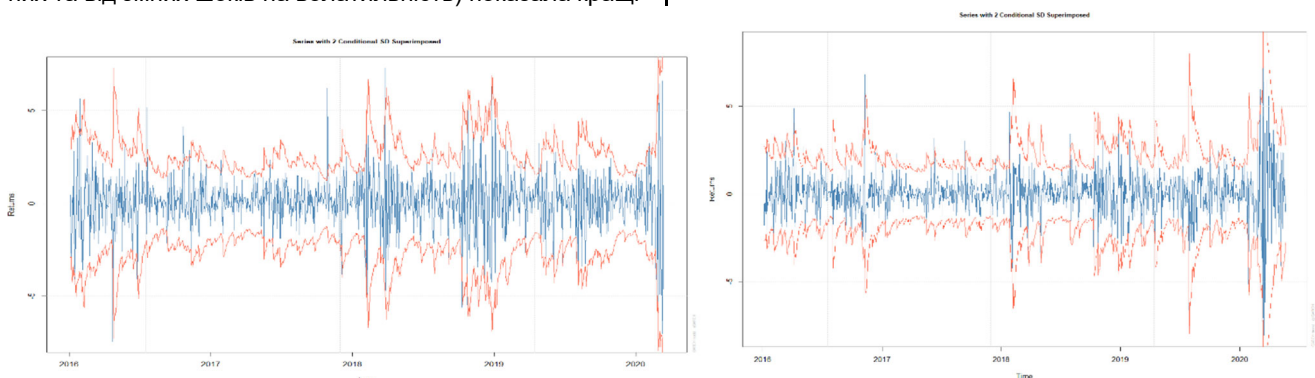


Рис. 2. Значення часового ряду лог-дохідностей акцій Microsoft (зліва) та Pfizer (справа) з накладанням рядів волатильності в тренувальній вибірці

Джерело: розрахунки авторів.

Розглядаючи часові ряди лог-дохідностей цінних паперів та динаміку їхньої волатильності, бачимо, що рівень волатильності впливав на математичне сподівання лог-дохідностей, однак їхнє математичне сподівання залишалося близьким до 0 і не зазнавало відчутних змін. Таким чином, вплив волатильності на лог-дохідності акцій (а отже, і на котирування) завжди наявний на фондовому ринку, однак в окремі періоди він присутній більшою мірою, аніж в інші. Наприклад, періодом підвищеної волатильності для акцій Microsoft став кінець 2018 р. через загострення торговельної війни Китаю з США та її вплив на постачання елементів для виробництва комп'ютерних пристроїв, суттєвий сплеск волатильності виник у березні 2020 р. унаслідок змін очікувань інвесторів через пандемію коронавірусу, ефект від такого сплеску був помітний і в подальші місяці. Однак з 2021 р. з поширенням вакцинації та послабленням обмежень економічної діяльності порівняно з початком пандемії інвестиційні очікування стабілізувалися і волатильність повернулася до попередніх значень.

Подібна ситуація характерна і для акцій Pfizer – посилення волатильності наявне в окремі періоди, що пов'язано переважно із впливом зовнішніх подій на очікування інвесторів. У цілому можна зазначити, що математичне сподівання лог-дохідностей акцій Pfizer є нижчим порівняно із Microsoft: значення коефіцієнта в оптимальних ARIMA-GARCH-моделях становило 0,09 для Microsoft та 0,04 для Pfizer, що за рівності інших показників свідчить про вище математичне сподівання акцій Microsoft. Такий висновок узгоджується і з емпіричними даними: за даними кредитного рейтингового агентства Morningstar середня дохідність за 5 років становить 13,6 % для Pfizer та 32,19 % для Microsoft.

Розглянемо закони розподілу залишків ARIMA-моделей, використаних для побудови GARCH-моделей лог-дохідностей котирувань акцій Microsoft та Pfizer. Як уже було зазначено, специфікації моделі з припущенням про нормальність розподілу залишків демонстрували гірші результати порівняно з аналогічними версіями із застосуванням розподілу Стюдента або зміщеного розподілу Стюдента до залишків моделі. Це є наслідком значень коефіцієнта ексцесу моделей на рівні 4,38 для Microsoft та 4,77 для Pfizer, що означає більшу частку значень, сконцентрованих близько до математичного сподівання, аніж вимагає закон нормального розподілу. Така ситуація типова для дохідностей цінних паперів і зумовлена прагненням інвесторів мінімізувати ризик при інвестуванні в акції, що непрямо впливає на дохідності акцій та їхню волатильність. Бачимо, що серед негативних значень динаміки лог-дохідностей близько 50 %, як для Microsoft, так і для Pfizer, суттєво наближені до математичного сподівання. Подібна ситуація спостерігається і з позитивними значеннями динаміки: більшість з них є незначними за абсолютними значеннями, а отже, мають помірний вплив на значення котирування акцій.

У сукупності з більш широкими хвостами порівняно з вимогами нормального розподілу отримуємо висновок про наявність лептокуртотного розподілу для залишків лог-дохідностей цінних паперів. На рис. 3 наведено накладання змодельованої волатильності на котирування лог-дохідностей цінних паперів протягом досліджуваного періоду в межах тестової вибірки. Відповідно до графіків (рис. 3) змодельована волатильність за допомогою ARIMA-GARCH узгоджується із історичною динамікою лог-дохідностей котирувань та зберігає всі основні патерни, відсутні періоди суттєвої невідповідності змодельованої та фактичної динаміки показників.

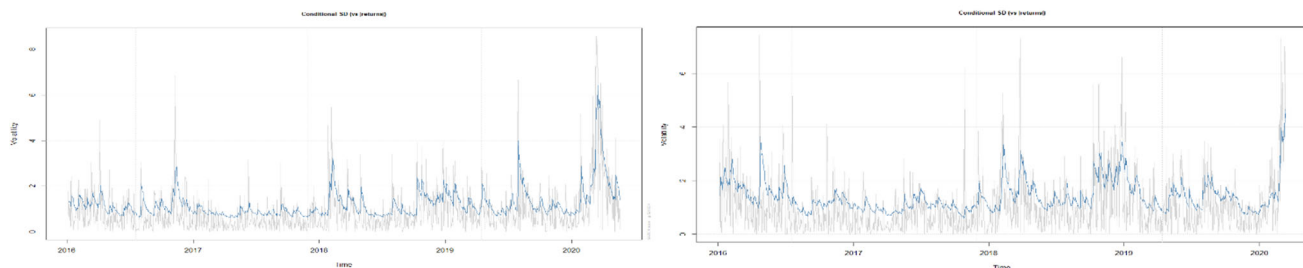


Рис. 3. Зіставлення змодельованої волатильності та лог-дохідностей акцій Microsoft (зліва) та Pfizer (справа) на тренувальній вибірці

Джерело: розрахунки авторів.

На основі побудованих моделей було здійснено аналіз VaR (Value at Risk). Ця метрика поширена в інвестиційному аналізі та ризик-менеджменті і відображає обсяги потенційних втрат інвестицій в актив за ринкових умов із певною ймовірністю протягом вказаного часового періоду. Графік VaR із квантилем 1 % відображає критичні значення лог-дохідності, перевищення яких не відбувається в 99 % випадків, однак у 1 % випадків перевищення інвестор може втратити власні вкладення. Для лог-дохідностей котирувань Microsoft протягом 2016–2020 рр. наявні одиничні випадки перетину графіка VaR та досліджуваного часового ряду, зумовлені сплесками волатильності. У цілому майже відсутні випадки можливих втрат інвестицій, тому акції Microsoft є надійним варіантом для інвестування (рис. 4).

За візуалізацією результатів бачимо, що для обох цінних паперів майже відсутні дні перетину VaR та значень лог-дохідностей акцій. Таким чином, акції Microsoft та Pfizer є порівняно надійними фінансовими інструментами з невисоким ризиком втрат інвесторами своїх вкладень. Побудовані моделі для лог-дохідностей котирувань акцій Microsoft (ARMA(3,0)-E-GARCH(1,1)) та Pfizer (ARMA(1,3)-GJR-GARCH(1,1)) було використано для прогнозування даних часових рядів на основі тестової вибірки. Для лог-дохідностей акцій Microsoft вибірка становила 350 спостережень (від 19.05.2020 р. до 30.07.2021 р.), для лог-дохідностей Pfizer – 300 спостережень (від 19.05.2020 р. до 30.07.2021 р.).

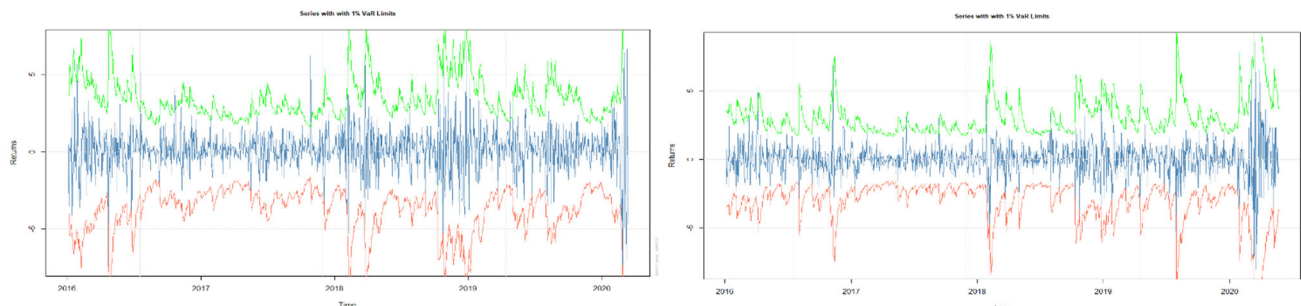


Рис. 4. Значення часового ряду лог-дохідностей Microsoft (зліва) та Pfizer (справа) із накладанням значень 1 % VaR на тренувальній вибірці

Джерело: розрахунки авторів.

Спершу до побудованих та оцінених на тренувальній вибірці моделей було застосовано бектестинг з метою відстеження можливих змін у параметрах та врахування їх при роботі з тестовою множиною. У межах бектестингу формується ковзаюче вікно встановленого розміру (мінімальним значенням для функції `ugarchroll` пакета `rugarch` є 100, що й було обрано як розмір ковзаючого вікна), відбувається поступове генерування прогнозів на одне значення вперед, після чого вікно рухається вперед на одне значення показника і повторює алгоритм. На основі зіставлення фактичних значень показника та прогнозованих значень моделі відбувається коригування параметрів моделі для покращення прогнозованих властивостей моделі. Для частоти переоцінювання параметрів було обрано кожні 150 спостережень для Microsoft та кожні 210 спостережень для Pfizer, тобто тричі в межах тестової вибірки. У результаті моделлю було побудовано власні прогнози значень тестової вибірки та зіставлено їх із фактичними значеннями показників тестової вибірки.

Для моделей, обраних як оптимальні на попередньому етапі, і п'яти наступних моделей за спаданням значень інформаційних критеріїв було розраховано якість прогнозів на основі тестової вибірки. Оптимальною вважається модель з мінімальним значенням параметрів похибки прогнозу. За результатами оцінювання моделей обрані моделі виявили мінімальні значення прогностичних похибок, що підтверджує їхню найвищу якість серед аналогів.

Розглядаючи результати прогнозування VaR для лог-дохідностей акцій Microsoft та Pfizer, бачимо лише кілька спостережень для кожного з цінних паперів, у яких значення лог-дохідності нижче порівняно з критичними значеннями лог-дохідності VaR ($\alpha = 0,05$), які означають можливу втрату інвестором власних вкладень. Таким чином, обидва цінних папери відносно надійні на ринку акцій (рис. 5).

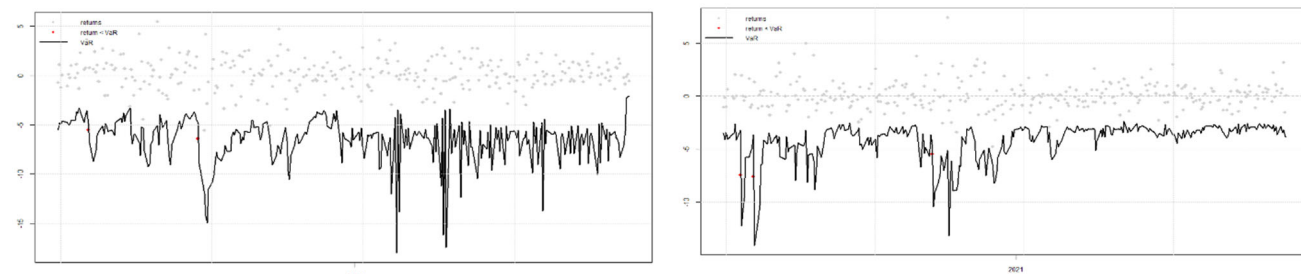


Рис. 5. Прогнозування VaR ($\alpha = 0,05$) на прикладі тестової вибірки для лог-дохідностей акцій Microsoft (зліва) та Pfizer (справа)

Джерело: розрахунки авторів.

Далі було обраховано VaR охоплення – показник частоти "перевищення" VaR, який визначає частку спостережень із нижчим рівнем дохідності порівняно з обраним VaR у певному часовому ряді. Для якісної моделі показник VaR охоплення має бути в межах обраного рівня надійності (напр., $\alpha = 0,05$). Якщо VaR охоплення перевищує α , частка спостережень із критично низьким

рівнем дохідності недооцінена моделлю, що може призводити до втрат при інвестуванні через недооцінювання ризиків. У зворотному випадку ризик втрати вкладень інвестором є переоціненим. Для показника VaR охоплення для лог-дохідностей акцій Microsoft та Pfizer було отримано результати (табл. 3), що свідчать про коректність побудованих моделей.

Таблиця 3. Результати розрахунків VaR охоплення

Акції	VaR охоплення
Microsoft	4,42 %
Pfizer	3,89 %

Джерело: розрахунки авторів.

Таким чином, на основі щоденних даних лог-дохідності акцій Microsoft та Pfizer було побудовано різні специфікації ARMA-GARCH-моделей. Отримані моделі було перевірено на коректність за різними статистичними тестами та за інформаційними критеріями було обрано оптимальні специфікації серед багатьох моделей. Ними стали ARMA(3,0)-E-GARCH (1,1) для Microsoft та ARMA(1,3)-GJR-GARCH(1,1) для Pfizer. Обидві моделі враховують асиметрію впливу збурень різних знаків на дисперсію фондових індексів, а отже, і на волатильність. На основі отриманих моделей методом ковзаючого вікна було побудовано прогнозовані значення лог-дохідності та зіставлено їх із попередньо обробленою тестовою вибіркою. Обрані специфікації моделей підтвердили свою якість, показавши мінімальне значення прогнозованих похибок серед розглянутих специфікацій. Отримані моделі було використано також для оцінювання квантиля VaR інвестиційних вкладень, де вони підтвердили свою якість. За отриманими специфікаціями моделей було побудовано прогноз математичного сподівання, дисперсії та VaR для лог-дохідностей цінних паперів на 300 та 350 спостережень, відповідно.

ДИСКУСІЯ ТА ВИСНОВКИ. Акції є одним із найпоширеніших об'єктів для інвестування. Індивідуальні інвестори як вкладають кошти напряму в цінні папери певної компанії, так і інвестують у різноманітні фонди, створені з акцій публічних компаній за різною структурою. Для значної частки населення високорозвинутих країн із розвиненою фінансовою інфраструктурою доходи від інвестицій є важливим джерелом пасивних доходів, що підвищують фінансову безпеку домогосподарств у випадку тимчасової втрати роботи, хвороби чи інших несприятливих обставин. Таким чином, аналіз котирувань цінних паперів з метою вибору активів для подальшого інвестування є надзвичайно важливим завданням.

При дослідженні динаміки котирувань акцій через суттєву роль ризику неодмінною складовою є поняття волатильності. Для коректного реагування на можливі сплески волатильності, зумовлені певними подіями, передбачення їхньої тривалості та матеріальності важливо застосовувати їхній аналіз. Як оптимальний варіант дослідження динаміки котирувань акцій виділяють економетричний аналіз за допомогою моделей дослідження часових рядів. Унаслідок високої якості найбільш поширеним у наукових колах є моделювання котирувань цінних паперів за допомогою поєднання ARIMA-GARCH-моделей. Різнманітні модифікації цього методу було реалізовано в даній роботі за допомогою мови програмування R. Для аналізу було використано дані щоденної дохідності акцій Microsoft та Pfizer.

На першому етапі процесу моделювання було здійснено перехід до лог-дохідностей, побудовано графіки початкових часових рядів, автокореляційних функцій, здійснено перевірку часових рядів на стаціонарність за тестом Дікі-Фулера та отримано оптимальну специфікацію ARIMA-моделі для обох індексів. Водночас при перевірці залишків моделей на автокореляцію та ARCH-ефект отримали позитивні результати, що свідчить про достатність використання лише ARIMA-моделі та викликає потребу в GARCH. Унаслідок перебирання різноманітних специфікацій GARCH було обрано оптимальні для двох акцій, обидві з яких враховують асиметричний вплив збурень залежно від їхніх знаків.

Отримані моделі було перевірено за тестом Льюнга-Бокса, ARCH LM-тестом, тестом Пірсона на оптимальність специфікації. За отриманими моделями було побудовано прогноз за методом ковзаючого вікна і зіставлено

з фактичними даними часових рядів. Також було співвіднесено якість прогнозів оптимальних моделей та інших специфікацій для перевірки отримання мінімальної прогнозованої похибки за використання обраних моделей. Усі результати підтвердили коректність побудованих моделей, що дозволяє застосовувати їх для аналізу та прогнозування вже на подальші періоди.

Список використаних джерел

1. Fama E. F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work // *The J. of Finance*, 1970. Vol. 25(2). P. 383–417. URL: <https://doi.org/10.2307/2325486>.
2. Malkiel B. G. Models Of Stock Market Predictability // *The J. of Financial Research*, dec. 2004. Vol. 27(4). P. 449–459. URL: <https://doi.org/10.1111/j.1475-6803.2004.00102.x>.
3. ARIMA-GARCH Model and ARIMA-GARCH Ensemble for Value-at-Risk Prediction on Stocks Portfolio / T. Tarno, D.A.I. Maruddani, R. Rahmawati et al., 2020. Vol. 10(91). URL: <https://doi.org/10.20944/preprints202010.0191.v1>.
4. Bhowmik R., Wang S. Stock Market Volatility and Return Analysis: A Systematic Literature Review // *Entropy (Basel)*, 2020 May. Vol. 4, № 22(5). P. 522. URL: <https://doi.org/10.3390/e22050522>.
5. Wang Y., Xiang Y., Lei X., Zhou Y. Volatility analysis based on GARCH-type models: Evidence from the Chinese stock market // *Economic Research-Ekonomska Istrazivanja*, 2022. Vol. 35. Is. 1. P. 2530–2554. URL: <https://doi.org/10.1080/1331677X.2021.1967771>.
6. Allen D. E., Rachim V. S. Dividend policy and stock price volatility: Australian evidence // *Applied Financial Economics*, 1996. Vol. 6(2). URL: <https://doi.org/10.1080/096031096334402>.
7. Sharpe S. A. Reexamining Stock Valuation and Inflation: The Implications of Analysts' Earnings Forecasts // *The Review of Economics and Statistics*, 2002. Vol. 84, № 4. P. 632–648. URL: <https://doi.org/10.1162/003465302760556468>.
8. Ghani M., Rahim H. A. Modeling and Forecasting of Volatility using ARMA-GARCH: Case Study on Malaysia Natural Rubber Prices / M. Ghani, H.A. Rahim // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019. 548. 012023.
9. Engle R. F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation // *Econometrica*, 1982. Vol. 50, № 4. P. 987–1007. URL: <https://doi.org/10.2307/1912773>.
10. Lundberg S., Terasvirta T. Evaluating GARCH models // *J. of Econometrics*, 2002. Vol. 110(2). P. 417–435.
11. Sukono Soeryana E., Simanjuntak A., Santoso A., Ghazali P. L. ARIMA-GARCH Model for Estimation of Value-at-Risk and Expected shortfall of Some Stocks in Indonesian Capital Market // *Proceedings of the Internat. Conf. on Industrial Engineering and Operations Management Riyadh*, 2019. Saudi Arabia.
12. Naylor T. H., Seaks T. G., Wichern D. W. Box-Jenkins Methods: An Alternative to Econometric Models // *Internat. Statistical Rev. / Revue Internat. de Statistique*, 1972. Vol. 40(2). P. 23–137. URL: <https://doi.org/10.2307/1402755>.
13. Levendis J. Time Series Econometrics: Learning Through Replication // *Springer Texts in Business and Economics*, 2018. 417 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-98282-3>.
14. Черкашина К. Економетричне моделювання залежності індексу ПФТС від рядів економічних показників // *Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Економіка*, 2013. № 12(153). С. 111–116.
15. Лашенко О., Кравець Т., Хрущ Л. Застосування пакетів прикладних програм в економетричному моделюванні фінансових часових рядів // *Економіко-математичне моделювання соціально-економічних систем*, 2017. Вип. 22. С. 33–60.
16. Xiang Y. Using ARIMA-GARCH Model to Analyze Fluctuation Law of International Oil Price // *Math. Problems in Eng.*, 2022. Vol. 2022, Art. ID 3936414. 7 p. URL: <https://doi.org/10.1155/2022/3936414>.
17. Dritsaki C. The Performance of Hybrid ARIMA-GARCH Modeling and Forecasting Oil Price // *Internat. J. of Energy Economics and Policy*, 2018. Vol. 8, № 3. P. 14–21.
18. Rjuman A. Stock Markets: An Overview and A Literature Review // *MPRA Paper*, 2019. № 101855.
19. Setiawan S. A. Does Macroeconomic Condition Matter for Stock Market? Evidence of Indonesia Stock Market Performance for 21 Years // *The Indonesian J. of Development Planning*, 2020. Vol. 4 (1). URL: <https://doi.org/10.36574/jpp.v4i1.105>.
20. Hussain S., Bhanu Murthy K.V., Singh A.K. Stock Market Volatility: A Review of the Empirical Literature // *IJ J. of Management*, 2019. Vol. 7(01).
21. Lochowski R. M., Volatility – how to Define It and how to Compute it // 55th SAMS Annual Meeting, 2020. URL: <http://web.sgh.waw.pl/~rlocho/Volatility.pdf>.
22. Boertje B., Garretsen H., Volatility, fundamentals and economic policy // *BIS Conf. Papers*, 1996. Vol. 1. P. 169–179. URL: <https://www.bis.org/pub/confp01.htm>.
23. Lambert E. Why Are Financial Markets So Volatile? // *Chicago Booth Rev.*, 2022. URL: <https://www.chicagobooth.edu/review/why-are-financial-markets-so-volatile>.

24. Aizenmann J., Pinto B. Managing Economic Volatility and Crises: A Practitioner's Guide // Cambridge University Press, 2006. URL: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511510755>.
25. Krauskopf L. Explainer: Why the U.S. stock market is tumbling in 2022 // Reuters, 2022. URL: <https://www.reuters.com/business/finance/why-us-stock-market-is-tumbling-2022-05-11/>.
26. Box G.E.P., Jenkins G.M. Time Series Analysis. Forecasting and Control. San Francisco: Holden-Day, 1976. 575 p.
27. Черняк О.І., Ставицький А.В., Баженова О.В., Шебаніна О.В. Економетрика: підручник. 2-ге вид., перероб. та доп. / За ред. О.І. Черняка. Миколаїв, 2014. 414 с.
28. Abdullah S.M., Siddiqua S., Siddiquee M.S.H., Hossain N. Modeling and forecasting exchange rate volatility in Bangladesh using GARCH models: a comparison based on normal and Student's t-error distribution // Financ. Innov., 2017. Vol. 3, № 18. URL: <https://doi.org/10.1186/s40854-017-0071-z>.
29. Pedersen J.H. ARMA(1,1)-GARCH(1,1) Estimation and forecast using rugarch. 2013. URL: <https://stat.ethz.ch/pipermail/r-sigfinance/attachments/20130608/91b6cb9d/attachment.pdf>.
30. Levendis J.D. Time Series Econometrics. Learning Through Replication. Springer Texts in Business and Economics, Springer, 978-3-319-98282-3, 2018. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-98282-3>.
31. Boudt K. GARCH Models in R // DataCamp. URL: https://s3.amazonaws.com/assets.datacamp.com/course_9628/slides/chapter1.pdf.
32. Stehliková B. Modelling volatility – ARCH and GARCH models. Time series analysis. URL: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/ts16/lectures/7_garch.pdf.
33. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // J. of Econometrics, 1986. Vol. 31(3). P. 307–327. URL: [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1).
34. Bollerslev T. A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return // The Review of Economics and Statistics, 1987. Vol. 69, № 3. P. 542–547. URL: <https://doi.org/10.2307/1925546>.
35. Brownlees C., Engle R., Kelly B. A Practical Guide to Volatility Forecasting through Calm and Storm // C. Brownlees, R. Engle, B. Kelly // The Journal of Risk, 2011. Vol. 14, № 2. P. 3–22.

O. Liashenko, Dr. Sci. (Econ.), Prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
K. Molokanova, Consultant
EY Germany, Berlin,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

36. Kumar H.P., Patil B.S. Volatility forecasting – a performance measure of GARCH techniques with different distribution models // International J. of Soft Computing, Mathematics and Control (IJSCMC), 2016. Vol. 5, № 2/3. URL: <https://doi.org/10.14810/ijscmc.2016.5301>.
37. Jiang W. Using the GARCH model to analyze and predict the different stock markets // Uppsala University, 2012. URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:576215/FULLTEXT02.pdf>.
38. GARCH-modeling Diagnostic Tests. URL: <https://logicalerrors.wordpress.com/2017/08/14/garch-modeling-conditional-varianceuseful-diagnostic-tests/>.
39. Ozdemir O. ARCH-GARCH Tutorial with rugarch package. URL: <http://users.metu.edu.tr/ozancan/ARCHGARCHTutorial.html>.
40. Ruppert D. GARCH Analysis and Forecasting // Statistics and Data Analysis for Financial Engineering, 2018. URL: <https://faculty.washington.edu/ezivot/econ589/ch18-garch.pdf>.
41. Jiang W. Modeling and predicting of different stock markets with GARCH model. 2012. URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:533129/FULLTEXT01.pdf>.
42. Naika N., Mohana B.R., Jhaa R.A. GARCH Model Identification for Stock Crises Events // Procedia Computer Sci., 2020. Vol. 171. P. 1742–1749. URL: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.04.187>.
43. Li E. R. Applications of asymmetric GARCH model with conditional distributions: the empirical case of the NASDAQ computer index's daily closing returns // Lambert Academia Publishing, 2012. 52 p.
44. Naika N., Mohana B. R., Jhaa R. A. GARCH-Model Identification based on Performance of Information Criteria // Procedia Computer Sci., 2020. Vol. 171. P. 1935–1942. URL: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.04.207>.

Received: 01/11/2022
1st Revision: 28/12/2022
Accepted: 01/02/2023

Author's declaration on the sources of funding of research presented in the scientific article or of the preparation of the scientific article: budget of university's scientific project.

ANALYSIS AND FORECASTING OF THE RETURN OF MICROSOFT AND PFIZER SHARES USING ARIMA-GARCH MODELS

Shares are one of the most common objects for investment. Individual investors both invest directly in the securities of a certain company and invest in various funds created from the shares of public companies according to different structures. For a significant share of the population of highly developed countries with a developed financial infrastructure, income from investments is an important source of passive income that increases the financial security of households in case of temporary loss of work, illness, or other adverse circumstances. Therefore, the analysis of securities quotes to select assets for further investment is an extremely important task. When studying the dynamics of stock quotes, due to the significant role of risk, volatility is an essential component. To correctly respond to possible spikes in volatility caused by certain events, and forecasting their duration, it is important to use analysis. Econometric analysis with the help of time series research models is selected as the optimal option for the study of the dynamics of stock quotations. Due to the high quality, the most common is the simulation of securities quotations using a combination of ARIMA-GARCH models. Various modifications of this method were implemented in this work using the R programming language. Data on the daily returns of Microsoft and Pfizer shares were used for the analysis. At the first stage of the modeling process, a transition to log-returns was made, graphs of the initial time series, autocorrelation functions were constructed, time series were checked for stationarity according to the Dickey-Fuller test, and the optimal specification of the ARIMA model was obtained for both indices. At the same time, when checking the residuals of the models for autocorrelation and the ARCH effect, positive results were obtained, which indicates the inadequacy of using only the ARIMA model and the need for GARCH. As a result of sorting through various GARCH specifications, optimal ones were chosen for two stocks, both of which take into account the asymmetric impact of disturbances depending on their signs. The resulting models were tested by the Leung-Box test, the ARCH LM test, and the Pearson test for specification optimality. Based on the obtained models, a forecast was built using the sliding window method and compared with the actual time series data. The quality of the forecasts of the optimal models and other specifications was also correlated to check that the minimum forecast error was obtained using the selected models. All results confirmed the correctness of the built models, which allows them to be used for analysis and forecasting already for further periods.

Keywords: ARIMA-GARCH Models, securities, financial time rows, shares, stock exchange market, volatility.

References (in Latin): Translation / Transliteration / Transcription

1. Fama, E.F., 1970. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work / E.F. Fama // The Journal of Finance. 1970. Vol. 25(2). – P. 383–417. <https://doi.org/10.2307/2325486>.
2. Malkiel, B.G., 2004. Models Of Stock Market Predictability / B.G. Malkiel // The Journal of Financial Research. December, 2004. Vol. 27 (4). – P. 449–459. <https://doi.org/10.1111/j.1475-6803.2004.00102.x>.
3. Tarno, T., Maruddani, D.A.I., Rahmawati, R., Hoyyi, A., Trimono, T., Munawar, M., 2020. ARIMA-GARCH Model and ARIMA-GARCH Ensemble for Value-at-Risk Prediction on Stocks Portfolio / T. Tarno, D.A.I. Maruddani, R. Rahmawati, A. Hoyyi, T. Trimono, M. Munawar // Preprints. 2020. Vol.10 (91). <https://doi.org/10.20944/preprints202010.0191.v1>.
4. Bhowmik, R., Wang, S., 2020. Stock Market Volatility and Return Analysis: A Systematic Literature Review / R. Bhowmik, S. Wang // Entropy (Basel). 2020 May 4;22(5):522. <https://doi.org/10.3390/e22050522>.
5. Wang, Y., Xiang, Y., Lei, X., Zhou, Y., 2022. Volatility analysis based on GARCH-type models: Evidence from the Chinese stock market / Y. Wang, Y. Xiang, X. Lei, Y. Zhou // Economic Research-Ekonomska Istraživanja. Vol. 35. 2022. Is. 1. – P. 2530–2554. <https://doi.org/10.1080/1331677X.2021.1967771>.
6. Allen, D.E., Rachim, V.S., 1996. Dividend policy and stock price volatility: Australian evidence / D.E. Allen, V.S. Rachim // Applied Financial Economics. 1996. Vol. 6 (2). <https://doi.org/10.1080/096031096334402>.

7. Sharpe, S.A., 2002. Reexamining Stock Valuation and Inflation: The Implications of Analysts' Earnings Forecasts / S.A. Sharpe // *The Review of Economics and Statistics*. Vol. 84, no. 4, 2002. – P. 632–648. <https://doi.org/10.1162/003465302760556468>.
8. Ghani, M., Rahim, H.A., 2019. Modeling and Forecasting of Volatility using ARMA-GARCH: Case Study on Malaysia Natural Rubber Prices / M. Ghani, H.A. Rahim // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 548 012023.
9. Engle, R.F., 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation / R.F. Engle // *Econometrica*, vol. 50, no. 4, 1982. – P. 987–1007. <https://doi.org/10.2307/1912773>.
10. Lundberg, S., Terasvirta, T., 2002. Evaluating GARCH models / S. Lundberg, T. Terasvirta // *Journal of Econometrics*. 110(2): 417–435.
11. Sukono, Soeryana, E., Simanjuntak, A., Santoso, A., Ghazali, P.L., 2019. ARIMA-GARCH Model for Estimation of Value-at-Risk and Expected shortfall of Some Stocks in Indonesian Capital Market / Sukono, E. Soeryana, A. Simanjuntak, A. Santoso, P.L. Ghazali // *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management Riyadh, Saudi Arabia*, 2019.
12. Naylor, T.H., Seaks, T.G., Wichern, D.W., 1972. Box-Jenkins Methods: An Alternative to Econometric Models / T.H. Naylor, T.G. Seaks, D.W. Wichern // *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique*. 1972. Vol. 40 (2), P. 123–137. <https://doi.org/10.2307/1402755>.
13. Levendis, J., 2018. Time Series Econometrics: Learning Through Replication / J. Levendis // *Springer Texts in Business and Economics*. 2018. 417 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-98282-3>.
14. Cherkashyna, K., 2013. Econometric's Model: the Dependence of PFTS Index from Economics Ranks / K. Cherkashyna // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Economics*. 2013. No12(153). P. 111–116. (in Ukrainian).
15. Liashenko, O., Kravets, T., Khrushch, L., 2017. Zasosuvannya paketiv prykladnykh program v ekonometrychnomu modeliuvanni finansovykh chasovykh riadiv / O. Liashenko, T. Kravets, L. Khrushch // *Ekonomiko-matematychni modeliuvannya socialno-ekonomichnykh system*. 2017. Issue 22. P. 33–60. (in Ukrainian).
16. Xiang, Y., 2022. Using ARIMA-GARCH Model to Analyze Fluctuation Law of International Oil Price / Y. Xiang // *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2022, Article ID 3936414, 7 pages, 2022. <https://doi.org/10.1155/2022/3936414>.
17. Dritsaki, C., 2018. The Performance of Hybrid ARIMA-GARCH Modeling and Forecasting Oil Price / C. Dritsaki // *International Journal of Energy Economics and Policy*. 2018. Vol. 8. № 3. P. 14–21.
18. Rjumohan, A., 2019. Stock Markets: An Overview and A Literature Review / A. Rjumohan // *MPRA Paper No. 101855*.
19. Setiawan, S.A., 2020. Does Macroeconomic Condition Matter for Stock Market? Evidence of Indonesia Stock Market Performance for 21 Years / S.A. Setiawan // *The Indonesian Journal of Development Planning*. 2020. Vol. 4 (1). URL: <https://doi.org/10.36574/jpp.v4i1.105>.
20. Hussain, S., Bhanu Murthy, K.V., Singh, A.K., 2019. Stock Market Volatility: A Review of the Empirical Literature / S. Hussain, K.V. Bhanu Murthy, A.K. Singh // *IJJ Journal of Management*. 2019. Vol.7 (01).
21. Lochowski R.M., VOLATILITY – HOW TO DEFINE IT AND HOW TO COMPUTE IT, 55th SAMS Annual Meeting. 2020. URL: <http://web.sgh.waw.pl/~rlocho/Volatility.pdf>.
22. Boertje B., Garretsen H., Volatility, fundamentals and economic policy, BIS Conference Papers. 1996. Vol. 1, P. 169–179. URL: <https://www.bis.org/publ/confp01.htm>
23. Lambert E., Why Are Financial Markets So Volatile? Chicago Booth Review. 2022. URL: <https://www.chicagobooth.edu/review/why-are-financial-markets-so-volatile>.
24. Aizenmann J., Pinto B., Managing Economic Volatility and Crises: A Practitioner's Guide, Cambridge University Press. 2006. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511510755>.
25. Krauskopf L., Explainer: Why the U.S. stock market is tumbling in 2022, Reuters. 2022. URL: <https://www.reuters.com/business/finance/why-us-stock-market-is-tumbling-2022-05-11/>.
26. Box, G.E.P., Jenkins, G.M., 1976. Time Series Analysis. Forecasting and Control. San Francisco: Holden-Day, 1976. – 575 p.
27. Cherniak O.I., Stavyskyi A.V., Bazhenova O.V., Shebanina O.V. Ekonometryka: pidruchnyk 2-he vyd., pererob. ta dop. – Za red. O.I. Cherniaka. – Mykolaiv, 2014 – 414 s.
28. Abdullah, S.M., Siddiqua, S., Siddiquee, M.S.H., Hossain, N., 2017. Modeling and forecasting exchange rate volatility in Bangladesh using GARCH models: a comparison based on normal and Student's t-error distribution / S.M. Abdullah, S. Siddiqua, M>S>H>S> Siddiquee, N. Hossain // *Financ Innov* 3, 18 (2017). <https://doi.org/10.1186/s40854-017-0071-z>.
29. Pedersen, J.H., 2013. ARMA(1,1)-GARCH(1,1) Estimation and forecast using rugarch, 2013. URL: <https://stat.ethz.ch/pipermail/r-significance/attachments/20130608/91b6cb9d/attachment.pdf>.
30. Levendis, J.D., 2018. Time Series Econometrics. Learning Through Replication. Springer Texts in Business and Economics, Springer, 978-3-319-98282-3. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-98282-3>.
31. Boudt K. GARCH MODELS IN R, DataCamp. URL: https://s3.amazonaws.com/assets.datacamp.com/production/course_9628/slides/chapter1.pdf.
32. Stehliková B. Modelling volatility – ARCH and GARCH models. Time series analysis. URL: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/ts16/lectures/7_garch.pdf.
33. Bollerslev, T., 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity / T. Bollerslev // *Journal of Econometrics*, 31(3), 1986, pp. 307–327. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1).
34. Bollerslev, T., 1987. A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return / T. Bollerslev // *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 69, No. 3, 1987, pp. 542–547. <https://doi.org/10.2307/1925546>.
35. Brownlees, C., Engle, R., Kelly, B., 2011. A Practical Guide to Volatility Forecasting through Calm and Storm / C. Brownlees, R. Engle, B. Kelly // *The Journal of Risk* (3–22), Vol. 14 № 2 (2011).
36. Kumar, H.P., Patil, B.S., 2016. Volatility forecasting – a performance measure of GARCH techniques with different distribution models / H.P. Kumar, B.S. Patil // *International Journal of Soft Computing, Mathematics and Control (IJSCMC)*, Vol. 5, №. 2/3 (2016). <https://doi.org/10.14810/ijscmc.2016.5301>.
37. Jiang W. Using the GARCH model to analyze and predict the different stock markets, Uppsala University, 2012. URL: <https://www.divaportal.org/smash/get/diva2:576215/FULLTEXT02.pdf>.
38. GARCH-modeling Diagnostic Tests. URL: <https://logicalerrors.wordpress.com/2017/08/14/garch-modeling-conditional-varianceuseful-diagnostic-tests/>.
39. Ozdemir O. ARCH-GARCH Tutorial with rugarch package. URL: <http://users.metu.edu.tr/ozancan/ARCHGARCHTutorial.html>
40. Ruppert, D., 2018. GARCH Analysis and Forecasting, Statistics and Data Analysis for Financial Engineering. URL: <https://faculty.washington.edu/ezivot/econ589/ch18-garch.pdf>.
41. Jiang, W., 2012. Modeling and predicting of different stock markets with GARCH model. URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:533129/FULLTEXT01.pdf>.
42. Naika, N., Mohana, B.R., Jhaa, R.A., 2020. GARCH Model Identification for Stock Crises Events / N. Naika, B.R. Mohana, R.A. Jhaa // *Procedia Computer Science* 171 (2020), pp. 1742–1749. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.04.187>.
43. Li E.R. Applications of asymmetric GARCH model with conditional distributions: the empirical case of the NASDAQ computer index's daily closing returns. Lambert Academia Publishing, 2012. 52 p.
44. Naika N., Mohana B. R., Jhaa R. A. GARCH-Model Identification based on Performance of Information Criteria / N. Naika, B.R. Mohana, R.A. Jhaa // *Procedia Computer Science* 171 (2020) pp. 1935–1942. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.04.207>.